Pentatic Mathematics Competition V

Wildabandon

18 – 19 Juli 2020

I

Soal

PETUNJUK

1. Kerjakan soal-soal berikut dengan jujur agar mendapatkan manfaat yang maksimal.
2. Disarankan untuk mengerjakannya menggunakan laptop.
3. Lama pengerjaan soal adalah 2 hari, dari tanggal 18 Juli 2020 sampai 19 Juli 2020 pada jam 23 : 59.
4. Dilarang menggunakan alat bantu hitung seperti, kalkulator, busur, maupun alat bantu hitung lainnya.
5. Terdiri dari 3 bagian: kemampuan dasar, kemampuan lanjut, dan uraian.
6. Untuk kemampuan dasar:
   (a). Tuliskan jawaban akhirnya saja tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain,
   (b). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapat 2 (dua) poin,
   (c). Untuk soal yang dijawab **salah**, mendapat -1 (minus satu) poin,
   (d). Untuk soal yang **tidak dijawab** atau **kosong**, mendapat 0 (nol) poin.
7. Untuk kemampuan lanjut:
   (a). Tuliskan jawaban akhirnya saja tanpa menuliskan satuan, koma (,), titik (.), dan lain-lain,
   (b). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapat 5 (lima) poin,
   (c). Untuk soal yang dijawab **salah** atau **kosong (tidak dijawab)**, mendapat 0 (nol) poin,
8. Untuk uraian:
   (a). Tuliskan jawaban beserta penjelasan yang jelas dan runtut,
   (b). Jawaban dapat difoto (asal jelas), di-scan, atau diketik. Jika difoto, disarankan untuk memfoto menggunakan aplikasi **Cam Scanner** dalam mode scan dan menjadikan satu dalam bentuk .pdf.
   (c). Setiap soal bernilai $0 - 15$ poin, tidak ada pengurangan untuk jawaban yang salah atau tidak dijawab.
9. Selamat mengerjakan!

1 Kemampuan Dasar

1. Tentukan jumlah dari sepuluh bilangan prima pertama.

2. Tentukan bilangan asli terkecil A sehingga $\sqrt{4116 \times A}$ merupakan bilangan bulat.

3. Diberikan $\triangle ABC$. Titik D terletak pada sisi BC sehingga besar $\angle BAD = \angle CAD$. Diketahui panjang $AC = 5, CD = 3$, dan panjang $BC = 9$. Jika luas dari $\triangle ABC$ adalah L, tentukan nilai dari L^2.

4. Untuk setiap bilangan real x, didefinisikan:
   - $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 5 \rfloor = 5$; $\lfloor 10,4 \rfloor = 10$; dan $\lfloor -6,5 \rfloor = -7$.
   - $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 5 \rceil = 5$; $\lceil 10,4 \rceil = 11$; dan $\lceil -6,5 \rceil = -6$.

   Tentukan nilai dari

   $$\left\lfloor \frac{0}{1} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{3}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor + \cdots + \left\lceil \frac{2019}{2020} \right\rceil$$

5. Penta dan Penti sedang ingin membagikan 200 apel dari pamannya untuk diri mereka. Penta minimal mendapatkan 5 apel dan Penti minimal mendapatkan 3 apel. Berapa banyak cara mereka membagikan apel-apel tersebut

6. Tentukan jumlah semua bilangan asli x sehingga

   $$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

   dengan y bilangan asli.

7. Jika $x^{2020} - \dfrac{1}{x^{2020}} = \sqrt{21}$, tentukan nilai yang mungkin dari $x^{2020} + \dfrac{1}{x^{2020}}$.

8. Sebuah persegi memiliki luas L dimana

   $$L = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 15^2$$

   Jika panjang dari diagonal persegi tersebut adalah D, tentukan nilai $\left(\dfrac{D}{2}\right)^2$.

9. Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 100\}$. Diambil dua bilangan berbeda dari himpunan S. Jika peluang jumlah dari dua bilangan tersebut habis dibagi 8 dapat dinyatakan dalam bentuk $\dfrac{a}{b}$ dengan $FPB(a, b) = 1$, tentukan $a + b$.

10. Jika $x^2 - 2x - 1 = 0$, tentukan nilai dari $x^{12} - 198x^6 + 2020$.

2 Kemampuan Lanjut

1. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli berurutan (a, b, c, d) dengan $a < b < c < d \leq 2020$ sehingga $a + b + c + d$ habis dibagi 6.

2. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi $2\sqrt{3}$. Titik P, Q masing-masing terletak pada sisi AB, titik R terletak pada sisi BC, titik S, T masing-masing terletak pada sisi CD, dan titik U terletak pada sisi DA sehingga $PQRSTU$ merupakan segienam beraturan. Tentukan panjang PS.

3. Suatu bilangan prima p disebut *kyojin* jika terdapat bilangan bulat x sehingga $\sqrt{p + 9x^2}$ bilangan bulat. Berapa banyak bilangan prima p kyojin yang kurang dari 50?

4. Avatar sedang berlatih menguasai elemen air. Karena dia juga suka menghitung, Avatar menuliskan sepuluh bilangan asli berurutan diatas air. Karena Katara sedang iseng, Katara menghapus salah satu bilangan sehingga jumlah dari bilangan yang tersisa adalah 2020. Tentukan bilangan yang dihapus oleh Katara.

5. Didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x untuk setiap bilangan real x. Sebagai contoh, $\lfloor 5 \rfloor = 5; \lfloor 10,4 \rfloor = 10$; dan $\lfloor -6,5 \rfloor = -7$. Tentukan banyak pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + 2y &= 7 \\ \lfloor y \rfloor + 2x &= 11 \end{aligned}$$

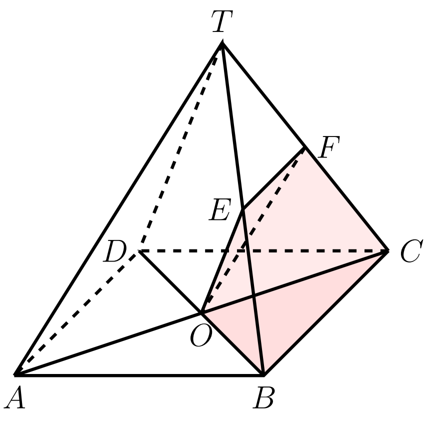
6. Tentukan sisa pembagian S dengan 1000 jika

$$S = \frac{1^4 + 1^2 + 1}{1^2 + 2} + \frac{2^4 + 2^2 + 1}{2^2 + 3} + \frac{3^4 + 3^2 + 1}{3^2 + 4} + \cdots + \frac{2020^4 + 2020^2 + 1}{2020^2 + 2021}$$

7. Diberikan $\triangle ABC$, titik D, E, F berturut-turut terletak pada sisi BC, CA, dan AB sehingga AD, BE, dan CF berpotongan di satu titik. Panjang $BF = 2AF$ dan panjang $3BD = 2CD$. Misalkan M titik tengah AC. Jika luas dari $\triangle DEF$ adalah 12 satuan luas, tentukan luas $\triangle FEM$ dalam satuan luas.

8. Misalkan jumlah semua bilangan real positif x yang memenuhi $x^{x^3} = 3$ adalah S. Tentukan nilai S^9.

9. Diberikan limas $T.ABCD$ dengan $ABCD$ merupakan persegi.



Titik E dan F berturut-turut merupakan titik tengah BT dan CT. Titik O merupakan perpotongan diagonal persegi $ABCD$. Jika perbandingan volume limas $O.BCFE$ terhadap volume limas $T.ABCD$ dapat dinyatakan dalam bentuk $p : q$ dimana p, q bilangan asli dan $FPB(p, q) = 2$, tentukan $p + q$.

10. Tentukan banyak bilangan asli a sehingga terdapat bilangan asli b yang memenuhi

$$a = \sqrt[3]{\frac{(b-a)\left(a^2+ab+b^2\right)}{a} - a - 1}$$

3 Uraian

1. Diberikan dua grafik fungsi kuadrat $f(x) = 9 - x^2$ dan $g(x) = x^2 - 9$. Misalkan D adalah daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x)$ dan $g(x)$ dan mengandung titik $(0, 0)$. Jika sebanyak lima titik berada di dalam daerah D, buktikan bahwa terdapat dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) sehingga

$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leq 90 + 2x_1x_2 + 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2y_1y_2$$

2. Tentukan semua pasangan bilangan asli (x, y) sehingga xy habis dibagi $(x + y)$ dan $FPB(x, y) = 1$.

3. Alnilam, Gorgon, dan Wildabandon sedang mengerjakan soal PMC V. Awalnya, mereka bekerja secara individu (sendiri). Stopwatch A, stopwatch B, dan stopwatch C berturut-turut menghitung lama waktu yang dibutuhkan Alnilam, Gorgon, dan Wildabandon untuk menyelesaikan soal PMC V. Waktu yang ditunjukkan oleh masing-masing stopwatch merupakan lama pengerjaan dari mereka masing-masing. Jumlah dari waktu yang ditunjukkan ketiga stopwatch adalah 15 jam. Jika mereka bekerja sama dari jam $13:00$, buktikan bahwa mereka akan menyelesaikan soal PMC V tidak lebih dari jam $14:40$.

   Catatan : Asumsikan sebelum mereka mulai, masing-masing stopwatch menunjukkan detik ke-0.

4. Diberikan $\triangle ABC$ lancip. Misalkan titik D, E, F berturut-turut pada sisi BC, CA, dan AB sehingga berlaku

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CA}, \quad \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BA}$$

   Misalkan X merupakan perpotongan BE dan CF, sedangkan titik Y merupakan perpotongan BX dengan lingkaran luar $\triangle DEF$. Buktikan bahwa Y merupakan titik tengah BX (dengan kata lain, buktikan bahwa panjang $BY = YX$).

II

Soal dan Solusi

1 Kemampuan Dasar

1. Tentukan jumlah dari sepuluh bilangan prima pertama.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{129}}$

   Sepuluh bilangan pertama yaitu $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$, dan 29. Sehingga jumlahnya

   $$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = \boxed{129}$$

   > **Komentar.** Sebanyak 93.18% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini dikategorikan soal **sangat mudah**. Soal ini merupakan soal isian singkat termudah pada PMC V.

2. Tentukan bilangan asli terkecil A sehingga $\sqrt{4116 \times A}$ merupakan bilangan bulat.

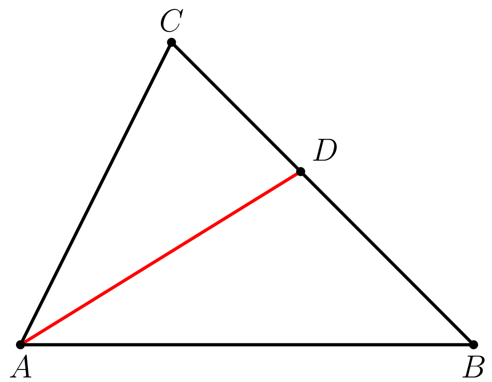
   Jawab: $\boxed{\mathbf{21}}$

   Perhatikan bahwa $4116 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^3$. Sehingga bilangan terkecil A yang memenuhi adalah $A = 3 \cdot 7 = \boxed{21}$.

   > **Komentar.** Sebanyak 77.27% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini tergolong **sangat mudah**. Fakta yang dapat dimanfaatkan dari kuadrat sempurna yaitu pangkat dari masing-masing faktor primanya merupakan bilangan genap.

3. Diberikan $\triangle ABC$. Titik D terletak pada sisi BC sehingga besar $\angle BAD = \angle CAD$. Diketahui panjang $AC = 5, CD = 3$, dan panjang $BC = 9$. Jika luas dari $\triangle ABC$ adalah L, tentukan nilai dari L^2.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{504}}$



   Perhatikan bahwa AD merupakan garis bagi. Maka

   $$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \iff \frac{6}{3} = \frac{AB}{5}$$

   sehingga panjang $AB = 10$. Demikian luas $\triangle ABC$ adalah

   $$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{12 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2} = \sqrt{504}$$

   Jadi, $L^2 = \boxed{504}$.

> **Komentar.** Sebanyak 34.09% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini tergolong **sedang-sulit**. Kunci penyelesaiannya adalah dengan memanfaatkan teorema garis bagi dan luas segitiga dengan metode Heron's Formula.

4. Untuk setiap bilangan real x, didefinisikan:
   - $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 5 \rfloor = 5$; $\lfloor 10,4 \rfloor = 10$; dan $\lfloor -6,5 \rfloor = -7$.
   - $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 5 \rceil = 5$; $\lceil 10,4 \rceil = 11$; dan $\lceil -6,5 \rceil = -6$.

   Tentukan nilai dari

   $$\left\lfloor \frac{0}{1} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{3}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{4}{5} \right\rfloor + \cdots + \left\lceil \frac{2019}{2020} \right\rceil$$

   Jawab: $\boxed{\mathbf{1010}}$

   Tinjau bahwa $\left\lfloor \frac{n-1}{n} \right\rfloor = 0$ dan $\left\lceil \frac{n-1}{n} \right\rceil = 1$ untuk setiap bilangan asli n. Maka kita cukup tinjau

   $$\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{3}{4} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{2019}{2020} \right\rceil = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{1010 kali}} = \boxed{1010}$$

> **Komentar.** Sebanyak 54.54% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal tergolong **mudah-sedang**.

5. Penta dan Penti sedang ingin membagikan 200 apel dari pamannya untuk diri mereka. Penta minimal mendapatkan 5 apel dan Penti minimal mendapatkan 3 apel. Berapa banyak cara mereka membagikan apel-apel tersebut

   Jawab: $\boxed{\mathbf{193}}$

   Misalkan banyak apel Penta adalah a dan banyak apel Penti adalah i dengan $a \geq 5$ dan $i \geq 3$ serta $a + i = 200$. Misalkan $a = 4 + a'$ dan $i = 2 + i'$ dengan $a, i \geq 1$. Demikian $a' + i' = 194$. Sehingga banyak pasangan yang memenuhi adalah

   $$C_{2-1}^{194-1} = C_1^{193} = \frac{193!}{192!1!} = \boxed{193}$$

> **Komentar.** Sebanyak 50% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**. Mencari banyak solusi bilangan asli dari $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = k$ dapat dicari menggunakan Star and Bar Theorem.

6. Tentukan jumlah semua bilangan asli x sehingga

   $$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$$

   dengan y bilangan asli.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{153}}$

Kalikan kedua ruas dengan $5xy$, maka

$$10y + 5x = xy \iff 50 = (x-10)(y-5)$$

Kemungkinan nilai $(x-10)$ adalah

$$x - 10 = 1, 2, 5, 10, 25, 50 \iff x = 11, 12, 15, 20, 35, 60$$

Sehingga jumlah semua bilangan asli x yang memenuhi adalah $11+12+15+20+35+60 = \boxed{153}$.

> **Komentar.** Sebanyak 31.18% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini tergolong soal **sedang-sulit**. Ide penyelesaian dari soal ini yaitu dengan membentuk perkalian dua bilangan dan menyisakan konstanta di ruas yang lain. Trick ini disebut Simons's Trick.

7. Jika $x^{2020} - \dfrac{1}{x^{2020}} = \sqrt{21}$, tentukan nilai yang mungkin dari $x^{2020} + \dfrac{1}{x^{2020}}$. $\boxed{5}$

Jawab: $\boxed{\mathbf{5}}$

Dapat dibuktikan bahwa x merupakan bilangan real.

Misalkan $a = x^{2020}$ dan $b = \dfrac{1}{x^{2020}}$. Demikian $a - b = \sqrt{21}$ dan $ab = 1$. Maka

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = 21 + 4 \cdot 1 = 25$$

Karena x real, maka $a, b > 0$ sehingga $a + b > 0$. Demikian $a + b = 5$.

Jadi, nilai yang mungkin dari $x^{2020} + \dfrac{1}{x^{2020}} = \boxed{5}$.

> **Komentar.** Sebanyak 50% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini tergolong **sedang**. Dengan membuktikan x bilangan real, dapat kita peroleh bahwa $x^{2020} + \dfrac{1}{x^{2020}} > 0$. Hal ini hanya memberikan tepat satu solusi.

8. Sebuah persegi memiliki luas L dimana

$$L = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 15^2$$

Jika panjang dari diagonal persegi tersebut adalah D, tentukan nilai $\left(\dfrac{D}{2}\right)^2$.

Jawab: $\boxed{\mathbf{620}}$

Luas dari persegi tersebut adalah

$$L = \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} = 1240$$

Maka panjang sisi persegi adalah $\sqrt{L}$. Maka $D = \sqrt{2L}$. Kita dapatkan

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} = \frac{2L}{4} = \frac{L}{2} = \frac{1240}{2} = \boxed{620}$$

> **Komentar.** Sebanyak 63.63% peserta berhasil menjawb soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah**. Ide penyelesaian dari soal ini dengan memanfaatkan deret
>
> $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
>
> untuk mempermudah perhitungan.

9. Diberikan himpunan $S=\{1,2,3,4,\cdots,100\}$. Diambil dua bilangan berbeda dari himpunan S. Jika peluang jumlah dari dua bilangan tersebut habis dibagi 8 dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $FPB(a,b)=1$, tentukan $a+b$.

Jawab: $\boxed{\textbf{309}}$

Perhatikan bahwa banyak bilangan s dengan $s\in S$,

a) $s\equiv 0 \pmod 8$, yaitu $s=8,16,\cdots,96$ ada 12 bilangan.
b) $s\equiv 1 \pmod 8$, yaitu $s=1,9,\cdots,97$ ada 13 bilangan.
c) $s\equiv 2 \pmod 8$, yaitu $s=2,10,\cdots,98$ ada 13 bilangan.
d) $s\equiv 3 \pmod 8$, yaitu $s=3,11,\cdots,99$ ada 13 bilangan.
e) $s\equiv 4 \pmod 8$, yaitu $s=4,12,\cdots,100$ ada 13 bilangan.
f) $s\equiv 5 \pmod 8$, yaitu $s=5,13,\cdots,93$ ada 12 bilangan.
g) $s\equiv 6 \pmod 8$, yaitu $s=6,14,\cdots,94$ ada 12 bilangan.
h) $s\equiv 7 \pmod 8$, yaitu $s=7,15,\cdots,95$ ada 12 bilangan.

Misalkan dua bilangan yang diambil adalah x dan y dengan $x,y\in S$.

- Jika $x\equiv y\equiv 0 \pmod 8$, maka ada $C_2^{12}=66$ bilangan.
- Jika $x\equiv 1 \pmod 8$ dan $y\equiv 7 \pmod 8$, maka ada $C_1^{13}\cdot C_1^{12}=13\cdot 12=156$.
- Jika $x\equiv 2 \pmod 8$ dan $y\equiv 6 \pmod 8$, maka ada $C_1^{13}\cdot C_1^{12}=13\cdot 12=156$.
- Jika $x\equiv 3 \pmod 8$ dan $y\equiv 5 \pmod 8$, maka ada $C_1^{13}\cdot C_1^{12}=13\cdot 12=156$.
- Jika $x\equiv y\equiv 4 \pmod 8$, maka ada $C_2^{13}=78$ bilangan.

Sehingga peluang terambilnya dua bilangan yang jumlahnya habis dibagi 8 adalah

$$\frac{66+156+156+156+78}{C_2^{100}}=\frac{612}{50\cdot 99}=\frac{34}{275}$$

Demikian $a=34$ dan $b=275$ sehingga $a+b=\boxed{309}$.

> **Komentar.** Sebanyak 11.36% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini tergolong **sangat sulit**. Selain solusi diatas, Anda juga dapat mendata satu per satu. Namun, hal ini tidak efektif karena batasan dua bilangan yang diambil dari 1 sampai 100.

10. Jika $x^2-2x-1=0$, tentukan nilai dari $x^{12}-198x^6+2020$.

Jawab: $\boxed{\textbf{2019}}$

Perhatikan bahwa $x=0$, berakibat $x^2-2x-1\neq 0$. Bagi kedua ruas dengan x, didapatkan

$$x-2-\frac{1}{x}=0\Longleftrightarrow x-\frac{1}{x}=2$$

Maka

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 8 + 3(2) = 14$$

Kita peroleh

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = 196 + 2 = 198$$

Kalikan kedua ruas dengan x^6, maka

$$x^{12} + 1 = 198x^6 \iff x^{12} - 198x^6 + 1 = 0$$

Tambahkan kedua ruas dengan 2019, maka $x^{12} - 198x^6 + 2020 = \boxed{2019}$.

> **Komentar.** Sebanyak 36.36% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini tergolong **sedang-sulit**. Ide penyelesaian dari soal ini yaitu dengan mengubah bentuk $x^2 - 2x - 1 = 0$ menjadi $x - \dfrac{1}{x} = 2$.

2 Kemampuan Lanjut

1. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli berurutan (a, b, c, d) dengan $a < b < c < d \leq 2020$ sehingga $a + b + c + d$ habis dibagi 6.

   Jawab: $\boxed{\textbf{672}}$

   Kita dapatkan $b = a + 1, c = a + 2$, dan $d = a + 3$. Maka $a + b + c + d = 4a + 6$. Karena $a + b + c + d \equiv 0 \pmod 6$, maka

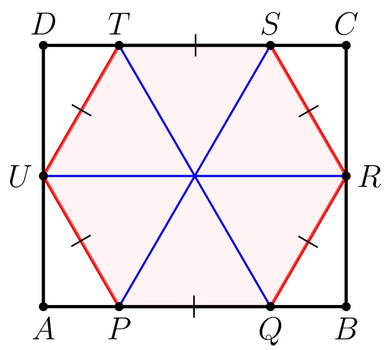
   $$4a + 6 \equiv 0 \pmod 6 \iff 4a \equiv 0 \pmod 6 \iff a \equiv 0 \pmod 3$$

   Karena $1 \leq a \leq 2017$, maka bilangan asli a yang memenuhi adalah $a = 3, 6, 9, 12, \cdots, 2016$ yang berarti ada $\boxed{672}$.

   > **Komentar.** Sebanyak 22.72% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini tergolong **sulit**. Beberapa peserta menjawab 673. Padahal, nilai a hanya terbatas $1 \leq a \leq 2017$, karena jika $a = 2019$ berakibat $b = 2020, c = 2021$, dan $d = 2022$ yang jelas tidak mungkin.

2. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi $2\sqrt{3}$. Titik P, Q masing-masing terletak pada sisi AB, titik R terletak pada sisi BC, titik S, T masing-masing terletak pada sisi CD, dan titik U terletak pada sisi DA sehingga $PQRSTU$ merupakan segienam beraturan. Tentukan panjang PS.

   Jawab: $\boxed{\textbf{4}}$



   Misalkan panjang sisi segienam adalah x. Perhatikan bahwa masing-masing besar sudut dalam pada segienam adalah

   $$\frac{180^\circ(6-2)}{6} = 30^\circ \cdot 4 = 120^\circ$$

   Dapat disimpulkan bahwa $\angle APU = \angle BQR = \angle CSR = \angle DTU = 60^\circ$. Dapat disimpulkan bahwa $\triangle APU, \triangle BQR$,
   $\triangle CSR$, dan $\triangle TDU$ kongruen. Demikian panjang $AP = QB = CS = DT$ dan panjang $AU = UD = CR = RB = \sqrt{3}$. Perhatikan $\triangle APU$ merupakan segitiga dengan sudut $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Akibatnya, panjang

   $$PU = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot AU = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2$$

   Perhatikan bahwa segienam beraturan dapat dibagi menjadi 6 buah segitia samasisi yang kongruen. Sehingga panjang sisi dari setiap segitiga samasisi tersebut adalah 2, yang berarti panjang $PS = 2 + 2 = \boxed{4}$.

> **Komentar.** Sebanyak 31.81% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini tergolong **sedang-sulit**. Soal ini "diralat" karena $ABCD$ persegi tidak mungkin, melainkan memungkinkan jika $ABCD$ persegipanjang.

3. Suatu bilangan prima p disebut *kyojin* jika terdapat bilangan bulat x sehingga $\sqrt{p+9x^2}$ bilangan bulat. Berapa banyak bilangan prima p kyojin yang kurang dari 50?

   Jawab: $\boxed{\mathbf{6}}$

   Misalkan $\sqrt{p+9x^2} = y$ dengan y bilangan asli. Maka $p + 9x^2 = y^2$ yang berarti

   $$p = 9x^2 - y^2 = (3x+y)(3x-y)$$

   Jika $x \geq 0$, maka $3x + y > 3x - y$. Karena bilangan prima hanya memiliki tepat 2 faktor, yaitu p dan 1, maka

   $$3x + y = p \quad \text{dan} \quad 3x - y = 1$$

   Jumlahkan kedua persamaan, diperoleh $x = \dfrac{p+1}{6}$. Diperoleh juga bahwa $y = \dfrac{p-1}{2}$. Agar y bilangan bulat, maka haruslah p ganjil. Hasil yang serupa diperoleh untuk $x < 0$. Demikian haruslah $(p+1)$ habis dibagi 6. Bilangan prima p yang memenuhi adalah

   $$p = 11, 17, 23, 29, 41, 47$$

   yang berarti ada $\boxed{6}$ bilangan prima $p < 50$ yang *kyojin*.

   > **Komentar.** Sebanyak 34.09% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikain soal ini tergolong **sedang-sulit**. Beberapa peserta menjawab 7. Hal ini melupakan fakta bahwa haruslah $y = \dfrac{p-1}{2}$ bilangan bulat. Sehingga menjawab 7 karena mendapatkan solusi $p = 2, 11, 17, 23, 29, 41, 47$.

4. Avatar sedang berlatih menguasai elemen air. Karena dia juga suka menghitung, Avatar menuliskan sepuluh bilangan asli berurutan diatas air. Karena Katara sedang iseng, Katara menghapus salah satu bilangan sehingga jumlah dari bilangan yang tersisa adalah 2020. Tentukan bilangan yang dihapus oleh Katara.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{225}}$

   Misalkan bilangan-bilangan yang ditulis Avatar adalah $a, a+1, a+2, \cdots, a+9$. Misalkan juga bilangan yang dihapus oleh Katara adalah $a + r$ dengan $0 \leq r \leq 9$. Maka

   $$\begin{aligned} a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+9) - (a+r) &= 2020 \\ 9a + 45 - r &= 2020 \\ 9a &= 1975 + r \\ a &= \frac{1975 + r}{9} \end{aligned}$$

   Tinjau bahwa $1975 \equiv 4 \pmod 9$. Agar $1975 + r \equiv 0 \pmod 9$, maka haruslah $r \equiv 5 \pmod 9$. Meningat bahwa $0 \leq r \leq 9$, maka kita punya $r = 5$. Subtitusikan, kita dapatkan

   $$a = \frac{1975 + r}{9} = \frac{1975 + 5}{9} = \frac{1980}{9} = 220$$

   Demikian bilangan yang dihapus oleh Katara adalah $a + r = 220 + 5 = \boxed{225}$.

> **Komentar.** Sebanyak 68.18% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **mudah**.

5. Didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x untuk setiap bilangan real x. Sebagai contoh, $\lfloor 5 \rfloor = 5; \lfloor 10,4 \rfloor = 10$; dan $\lfloor -6,5 \rfloor = -7$. Tentukan banyak pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi

$$\lfloor x \rfloor + 2y = 7$$
$$\lfloor y \rfloor + 2x = 11$$

Jawab: $\boxed{1}$

Bagi menjadi beberapa kasus. Notasikan $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ dan $0 \leq \{x\} < 1$.

a) **Kasus 1.** x, y bilangan bulat. Maka diperoleh persamaan

$$x + 2y = 7$$
$$y + 2x = 11$$

sehingga diperoleh $(x, y) = (5, 1)$. Memenuhi.

b) **Kasus 2.** x bilangan bulat dan y bilangan tak bulat. Diperoleh persamaan

$$x + 2\lfloor y \rfloor + 2\{y\} = 7 \tag{2.1}$$
$$\lfloor y \rfloor + 2x = 11 \tag{2.2}$$

Perhatikan pada persamaan (2.1), ruas kanan merupakan bilangan bulat. Maka $x + 2\lfloor y \rfloor + 2\{y\}$ merupakan bilangan bulat yang berarti haruslah $2\{y\}$ bilangan bulat. Kemungkinan nilai $\{y\}$ adalah $\{y\} = 0.5$. Akibatnya, kita peroleh

$$x + 2\lfloor y \rfloor = 6 \tag{2.3}$$

Selesaikan presamaan (2.1) dan (2.3), diperoleh $\lfloor y \rfloor = \frac{1}{3}$ dan $x = \frac{16}{3}$. Kontradiksi bahwa $\lfloor y \rfloor$ dan x harus bilangan bulat.

c) **Kasus 3.** x bilangan tak bulat dan y bilangan bulat. Diperoleh persamaan

$$\lfloor x \rfloor + 2y = 7 \tag{3.1}$$
$$y + 2\lfloor x \rfloor + 2\{x\} = 11 \tag{3.2}$$

Dengan alasan yang sama pada kasus sebelumnya, kemungkinan nilai $\{x\}$ adalah $\{x\} = 0.5$. Kita peroleh

$$y + 2\lfloor x \rfloor = 10 \tag{3.3}$$

Selesaikan persamaan (3.1) dengan (3.3), diperoleh $\lfloor x \rfloor = \frac{13}{3}$ dan $y = \frac{4}{3}$. Kontradiksi bahwa $\lfloor x \rfloor$ dan y haruslah bilangan bulat.

d) **Kasus 4.** x, y bilangan tak bulat. Diperoleh persamaan

$$\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 2\{y\} = 7$$
$$\lfloor y \rfloor + 2\lfloor x \rfloor + 2\{x\} = 11$$

Dengan alasan yang sama dengan kasus sebelumnya, haruslah $\{x\} = \{y\} = 0.5$. Diperoleh persamaan

$$\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 6 \tag{4.1}$$
$$\lfloor y \rfloor + 2\lfloor x \rfloor = 10 \tag{4.2}$$

Jumlahkan persamaan (4.1) dan (4.2), diperoleh

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \frac{16}{3} \tag{4.3}$$

Karena $\lfloor x \rfloor$ dan $\lfloor y \rfloor$ masing-masing bilangan bulat, tidak mungkin persamaan (4.3) terpenuhi.

Jadi, banyak pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi adalah $\boxed{1}$.

> **Komentar.** Sebanyak 40.90% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**. Langkah yang dapat dilakukan adalah dengan membagi kasus untuk x dan y, bilangan bulat atau bukan bilangan bulat.

6. Tentukan sisa pembagian S dengan 1000 jika

$$S = \frac{1^4+1^2+1}{1^2+2} + \frac{2^4+2^2+1}{2^2+3} + \frac{3^4+3^2+1}{3^2+4} + \cdots + \frac{2020^4+2020^2+1}{2020^2+2021}$$

Jawab: $\boxed{\mathbf{680}}$

Tinjau bahwa

$$\frac{n^4+n^2+1}{n^2+n+1} = \frac{\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)}{n^2+n+1} = n^2-n+1$$

Demikian S ekuivalen dengan

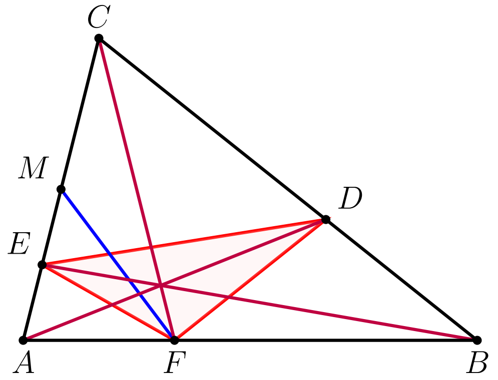
$$\begin{aligned} S &= \left(1^2+2^2+\cdots+2020^2\right) - (1+2+\cdots+2020) + 2020 \\ &= \frac{2020\cdot 2021\cdot 4041}{6} - \frac{2020\cdot 2021}{2} + 2020 \\ &= 1010\cdot 2021\cdot 1347 - 1010\cdot 2021 + 2020 \\ &\equiv 10\cdot 21\cdot 47 - 10\cdot 21 + 20 \pmod{1000} \\ &\equiv 9870 - 210 + 20 \pmod{1000} \\ &\equiv 9680 \pmod{1000} \\ S &\equiv 680 \pmod{1000} \end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagian dari S dengan 1000 adalah $\boxed{680}$.

> **Komentar.** Sebanyak 25% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang-sulit**. Ide penyelesaian soal ini adalah dengan memanfaatkan
> $$\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right) = n^4+n^2+1$$

7. Diberikan $\triangle ABC$, titik D, E, F berturut-turut terletak pada sisi BC, CA, dan AB sehingga AD, BE, dan CF berpotongan di satu titik. Panjang $BF = 2AF$ dan panjang $3BD = 2CD$. Misalkan M titik tengah AC. Jika luas dari $\triangle DEF$ adalah 12 satuan luas, tentukan luas $\triangle FEM$ dalam satuan luas.

Jawab: $\boxed{\mathbf{5}}$



Misalkan panjang $AF = x$, maka panjang $FB = 2x$. Misalkan panjang $BD = 2y$, maka panjang $CD = 3y$. Karena AD, BE, CF berpotongan di satu titik, menurut Teorema Ceva,

$$1 = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{CE}{EA}$$

sehingga $\frac{CE}{EA} = 3$. Misalkan panjang $AE = z$, maka panjang $CE = 4z$. Demikian panjang $AM = MC = 2z$. Perhatikan bahwa

$$\frac{L_{\triangle AFE}}{L_{\triangle ABC}} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{x}{3x} \cdot \frac{z}{4z} = \frac{1}{2} \Longrightarrow L_{\triangle AFE} = \frac{1}{12} L_{\triangle ABC}$$

Dengan cara yang sama, didapatkan $L_{\triangle FBD} = \frac{4}{15} L_{\triangle ABC}$ dan $L_{\triangle DEC} = \frac{9}{20} L_{\triangle ABC}$. Demikian

$$\begin{aligned}
L_{\triangle DEF} &= L_{\triangle ABC} - L_{\triangle AEF} - L_{\triangle FBD} - L_{\triangle DEC} \\
12 &= L_{\triangle ABC} - \frac{1}{12} L_{\triangle ABC} - \frac{4}{15} L_{\triangle ABC} - \frac{9}{20} L_{\triangle ABC} \\
12 &= \frac{60 - 5 - 16 - 27}{60} L_{\triangle ABC} \\
12 &= \frac{12}{60} L_{\triangle ABC} \\
L_{\triangle ABC} &= 60
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa perbandingan panjang $AF : AB = 1 : 3$. Maka perbandingan luas $L_{\triangle AFC} : L_{\triangle ABC} = 1 : 3$. Demikian luas $\triangle AFC$ adalah $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ satuan luas. Karea M titik tengah, maka perbandingan panjang $AM : AC = 1 : 2$. Sehingga perbandingan luas $L_{\triangle AFM} : L_{\triangle AFC} = 1 : 2$. Maka luas $\triangle AFM$ adalah $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ satuan luas. Tinjau bahwa $L_{\triangle AFE} = \frac{1}{12} L_{\triangle ABC} = \frac{1}{12} \cdot 60 = 5$ satuan luas. Demikian luas $\triangle FEM$ adalah $L_{\triangle AFM} - L_{\triangle AFE} = 10 - 5 = \boxed{5}$ satuan luas.

> **Komentar.** Sebanyak 15.90% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Ide penyelesaian dari soal ini adalah karena AD, BE, CF berpotongan di satu titik, maka Teroema Ceva berlaku. Serta soal ini memanfaatkan perbandingan luas.

8. Misalkan jumlah semua bilangan real positif x yang memenuhi $x^{x^3} = 3$ adalah S. Tentukan nilai S^9.

   Jawab: $\boxed{\mathbf{27}}$

Perhatikan bahwa $x^{3x^3} = 27$. Misalkan $t = x^3$.

$$27 = x^{3x^3} = \left(x^3\right)^{x^3} = t^t$$

Misalkan $f(t) = t^t$. Jelas bahwa $t = 0, 1$ tidak memenuhi. Untuk $t > 1$, perhatikan bahwa $f(t)$ merupakan fungsi naik sehingga tepat memiliki satu solusi, yaitu ketika $t = 3$. Untuk $0 < t < 1$, maka $t^t < 1$. Sehingga $t = 3$ merupakan satu-satunya solusi yang memenuhi. Demikian $x = \sqrt[3]{3}$ yang berarti $S = \sqrt[3]{3}$. Kita peroleh $S^9 = \boxed{27}$.

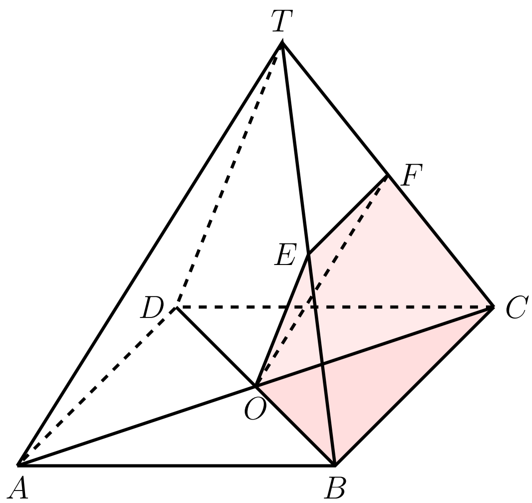
Solusi Alternatif. Perhatikan bahwa

$$3 = x^{x^3} = x^{x^{x^{\cdots}}} = x^3$$

Maka kita dapatkan $x = \sqrt[3]{3}$ sehingga $S = \sqrt[3]{3}$. Demikian $S^9 = \boxed{27}$.

> **Komentar.** Sebanyak 36.36% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang-sulit**.

9. Diberikan limas $T.ABCD$ dengan $ABCD$ merupakan persegi. Titik E dan F berturut-turut merupakan titik tengah BT dan CT. Titik O merupakan perpotongan diagonal persegi $ABCD$. Jika perbandingan volume limas $O.BCFE$ terhadap volume limas $T.ABCD$ dapat dinyatakan dalam bentuk $p : q$ dimana p, q bilangan asli dan $FPB(p, q) = 2$, tentukan $p + q$.



Jawab: $\boxed{\mathbf{38}}$

Misalkan titik G dan H berturut-turut titik tengah DT dan AT serta titik K, L, N, M berturut-turut titik tengah AD, BC, EF, dan HG. Titik O' adalah titik perpotongan TO terhadap MN.

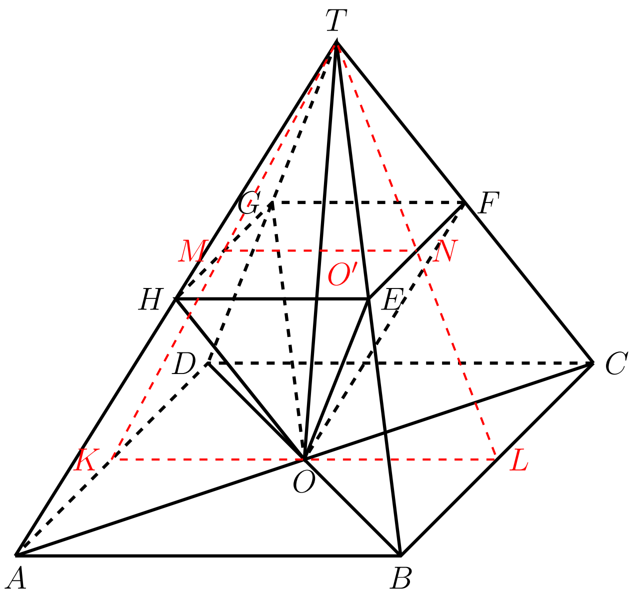
Misalkan panjang sisi persegi $ABCD$ adalah $2s$ dan tinggi limas $T.ABCD$ adalah $2t$.

Perhatikan bahwa jika E, F, G, H merupakan titik tengah berturut-turut sisi BT, CT, TD, dan AT, maka berakibat $AB \parallel HE, BC \parallel EF, CD \parallel FG$, dan $AD \parallel HG$. Sehingga juga $KL \parallel MN$ karena M dan N berturut-turut juga titik tengah KT dan LT. Berakibat panjang $TL = 2TN$. Maka $\triangle KLT$ sebangun dengan $\triangle MNT$.

$$\frac{KL}{MN} = \frac{TO}{TO'} = \frac{TL}{TN} = \frac{1}{2}$$

Maka didapatkan $KL = 2MN$ dan $TO = 2TO'$ yang berarti panjang $TO' = OO' = t$ dan $MN = s$. Diperoleh:

$$\begin{aligned} V_{T.ABCD} &= \frac{1}{3}L_{alas} \cdot (2t) = \frac{1}{3}(2s)^2(2t) = \frac{8}{3}s^2t \\ V_{T.HEFG} &= \frac{1}{3}L_{alas} \cdot t = \frac{1}{3}s^2t \\ V_{O.HEFG} &= \frac{1}{3}L_{alas} \cdot t = \frac{1}{3}s^2t \end{aligned}$$



Maka diperoleh

$$\begin{aligned} V_{ABCD.HEFG} = V_{T.ABCD} - V_{T.HEFG} &= \frac{8}{3}s^2t - \frac{1}{3}s^2t = \frac{7}{3}s^2t \\ V_{ABCD.EFGH} - V_{O.HEFG} &= \frac{7}{3}s^2t - \frac{1}{3}s^2t \\ V_{O.ABEH} + V_{O.BCFE} + V_{O.CDGF} + V_{O.ADGH} &= \frac{7-1}{3}s^2t \\ \therefore V_{O.ABEH} + V_{O.BCFE} + V_{O.CDGF} + V_{O.ADGH} &= 2st^2 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $V_{O.ABEH} = V_{O.BCFE} = V_{O.CDGF} = V_{O.ADGH}$ sehingga berakibat

$$\begin{aligned} V_{O.ABEH} + V_{O.BCFE} + V_{O.CDGF} + V_{O.ADGH} &= 2s^2t \\ 4V_{O.BCFE} &= 2s^2t \\ \therefore V_{O.BCFE} &= \frac{1}{2}s^2t \end{aligned}$$

Sehingga perbandingan volume limas $O.BCFE$ terhadap volume limas $T.ABCD$:

$$\begin{aligned} \frac{V_{O.BCFE}}{V_{T.ABCD}} &= \frac{\frac{1}{2}s^2t}{\frac{8}{3}s^2t} = \frac{3}{16} \\ V_{O.BCFE} : V_{T.ABCD} &= 6 : 32 \end{aligned}$$

Sehingga kita peroleh $p = 6$ dan $q = 32$. Demikian $p + q = \boxed{38}$.

> **Komentar.** Sebanyak 11.36% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian soal ini tergolong **sulit-sangat sulit**. Ide penyelesaian dari soal ini dengan membagi limas tersebut menjadi beberapa bagian sehingga kita dapat menemukan perbandingan volume dari beberapa bangun seperti pada solusi diatas.

10. Tentukan banyak bilangan asli a sehingga terdapat bilangan asli b yang memenuhi

$$a = \sqrt[3]{\frac{(b-a)\left(a^2+ab+b^2\right)}{a} - a - 1}$$

Jawab: $\boxed{\mathbf{0}}$

Persamaan ekuvalen dengan

$$b^3 = a^4 + a^3 + a^2 + a = a\left(a^3 + a^2 + a + 1\right)$$

Menurut algoritma euclid,

$$FPB\left(a, a^3 + a^2 + a + 1\right) = FPB\left(a, a^3 + a^2 + a + 1 - a\left(a^2 + a + 1\right)\right) = FPB(a, 1) = 1$$

Sehingga haruslah $a = p^3$ dan $a^3 + a^2 + a + 1 = q^3$ dengan p, q bilangan asli. Padahal,

$$a^3 < a^3 + a^2 + a + 1 < (a+1)^3 \Longrightarrow a^3 < q^3 < (a+1)^3$$

yang jelas tidak mungkin terdapat bilangan kubik diantara dua bilangan kubik berurutan. Sehingga banyak bilangan asli a yang memenuhi adalah $\boxed{0}$.

> **Komentar.** Sebanyak 29.54% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Ide pertama dalam menyelesaikan soal ini dengan menyederhanakan bentuk persamaa terlebih dahulu. Kemudian dapat dibuktikan bahwa masing-masing bentuk dari a dan $a^3 + a^2 + a + 1$ harus bilangan kubik.

3 Uraian

1. Diberikan dua grafik fungsi kuadrat $f(x) = 9 - x^2$ dan $g(x) = x^2 - 9$. Misalkan D adalah daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x)$ dan $g(x)$ dan mengandung titik $(0,0)$. Jika sebanyak lima titik berada di dalam daerah D, buktikan bahwa terdapat dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) sehingga

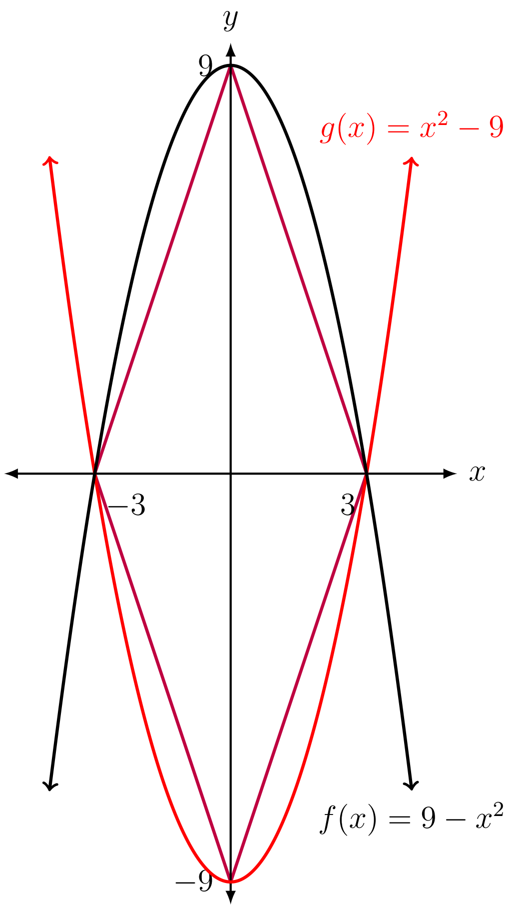
$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leq 90 + 2x_1x_2 + 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2y_1y_2$$

Bukti.

Perhatikan bahwa ketaksamaan ekuvalen dengan

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq 3\sqrt{10}$$

Kita ingin membuktikan bahwa terdapat dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) yang jaraknya tidak lebih dari $3\sqrt{10}$ satuan.



Perhatikan bahwa daerah D terbagi menjadi 4 (oleh sumbu-x dan sumbu-y). Jarak dua titik terjauh pada masing-masing daerah adalah $\sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ satuan. Karena terdapat 5 titik dan 4 daerah, maka menurut pigeon hole principle, terdapat dua titik yang berada pada daerah yang sama. Dan dua titik pada daerah yang sama jaraknya tidak akan lebih dari $3\sqrt{10}$ satuan. Jadi, terbukti bahwa terdapat dua titik yang jaraknya tidak lebih dari $3\sqrt{10}$, yang berakibat

$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leq 90 + 2x_1x_2 + 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2y_1y_2$$

■

> **Komentar.** Rata-rata dari perolehan poin peserta adalah 1. Demikian soal ini tergolong **sangat sulit**. Ide penyelesaian dari soal ini adalah dengan membagi daerah D menjadi beberapa bagian sehingga jarak maksimal antar dua titik pada masing-masing daerah adalah $3\sqrt{10}$. Lalu, dapat menggunakan Pigeon Hole Principle (prinsip sangkat merpati).

2. Tentukan semua pasangan bilangan asli (x, y) sehingga xy habis dibagi $(x + y)$ dan $FPB(x, y) = 1$.

Jawab: Tidak ada

Misalkan $\dfrac{xy}{x+y} = z$ dengan z bilangan asli. Maka

$$xy = (x + y)z = xz + yz \iff (x - z)(y - z) = z^2$$

Misalkan $FPB(x - z, y - z) = c$. Tuliskan $x - z = cz_0$ dan $x - y = cy_0$ dengan $FPB(y_0, z_0) = 1$. Maka

$$z^2 = (x - z)(y - z) = cz_0 \cdot cy_0 = c^2 y_0 z_0$$

Demikian $y_0 z_0$ harus kuadrat sempurna. Mengingat $FPB(y_0, z_0) = 1$, maka kondisi ini tercapai jika $y_0 = a^2$ dan $z_0 = b^2$ untuk suatu bilangan bulat a dan b. Kita dapatkan

$$x - z = a^2 c, \quad y - z = b^2 c, \quad z = abc$$

Sehingga kita dapatkan

$$x = a^2 c + abc = ac(a + b) \quad \text{dan} \quad y = b^2 c + abc = bc(a + b)$$

Karena $FPB(x, y) = 1$, maka

$$1 = FPB\big(ac(a + b), bc(a + b)\big) = c(a + b)$$

Maka $c = 1$ sehingga $a + b = 1$ yang berarti $b = 1 - a$. Kita dapatkan $x = a$ dan $y = 1 - a$ sehingga $x + y = 1$. Karena x, y bilangan asli, maka $x + y \geq 2$ yang berarti tidak mungkin $x + y = 1$.

Jadi, tidak ada pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi.

. . . .

Solution By Kenji Gunawan. Menurut Euclid Lemma, maka

$$FPB(x + y, x) = FPB(x + y, y) = FPB(x, y) = 1$$

Karena $(x + y) \mid xy$, maka $(x + y) \mid 1$. Jelas ini tidak memiliki solusi.

. . . .

Solution By Rafael Feng. Dengan mengingat Algoritma Euclid yaitu jika $FPB(a, b) = FPB(a + bk, b)$ untuk setiap a, b dan $k \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya dengan mengingat sifat $a \mid bc$ dan $FPB(a, b) = 1$ pastilah $a \mid c$. Sehingga dapat kita ubah $a \to x, b \to y, k = 1$, diperoleh $FPB(x, y) = FPB(x + y, y) = 1$, maka bila dilanjutkan dengan pergantian permisalan yaitu $a \to x + y, b = x$, dan $c = y$ sehingga karena $(x + y) \mid xy$ dan $FPB(x, y) = FPB(x, x + y) = 1$ sehingga jelas pasti akan diperoleh $(x + y) \mid y$, dengan alasan $x, y \in \mathbb{N}$ dan $y < x + y$ sehingga pasti didapat $x + y \nmid y$. Jadi tidak ada solusi asli untuk x dan y.

> **Komentar.** Rata-rata perolehan poin peserta adalah 1.47. Demikian soal ini tergolong **sangat sulit**. Soal ini dapat memanfaatkan sifat keterbagian dan menggunakan fakta $FPB(x, y) = 1$ seperti pada solusi dari **Kenji Gunawan** dan **Rafael Feng**.

3. Alnilam, Gorgon, dan Wildabandon sedang mengerjakan soal PMC V. Awalnya, mereka bekerja secara individu (sendiri). Stopwatch A, stopwatch B, dan stopwatch C berturut-turut menghitung lama waktu yang dibutuhkan Alnilam, Gorgon, dan Wildabandon untuk menyelesaikan soal PMC V. Waktu yang ditunjukkan oleh masing-masing stopwatch merupakan lama pengerjaan dari mereka masing-masing. Jumlah dari waktu yang ditunjukkan ketiga stopwatch adalah 15 jam. Jika mereka bekerja sama dari jam $13:00$, buktikan bahwa mereka akan menyelesaikan soal PMC V tidak lebih dari jam $14:40$.

   Catatan : Asumsikan sebelum mereka mulai, masing-masing stopwatch menunjukkan detik ke-0.

   Bukti.

   Misalkan Alnilam, Gorgon, dan Wildabandon berturut-turut membutuhkan waktu a jam, g jam, dan w jam untuk mengerjakan soal PMC V secara individu. Demikian $a+g+w = 15$. Dalam 1 jam, Alnilam, Gorgon, dan Wildabandon berturut-turut mengerjakan soal PMC V sebanyak $\frac{1}{a}$ bagian, $\frac{1}{g}$ bagian, dan $\frac{1}{w}$ bagian. Misalkan lama waktu mereka untuk mengerjakan soal PMC V secara bekerja sama adalah r jam. Maka

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{g} + \frac{1}{w}$$

   Dengan Chauchy Schwarz Engel, maka

$$\frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{g} + \frac{1^2}{w} \geq \frac{(1+1+1)^2}{a+g+w} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

   Dapat disimpulkan bahwa $\frac{1}{r} \geq \frac{3}{5}$ yang berarti

$$r \leq \frac{5}{3} \text{ jam} = \frac{5}{3} \cdot 60 \text{ menit} = 1 \text{ jam } 40 \text{ menit}$$

   Karena mereka mengerjakan dari jam $13:00$, maka mereka akan selesai dalam waktu

$$13:00 + r \leq 13:00 + 01:40 = 14:40$$

   Jadi, terbukti bahwa mereka akan menyelesaikan soal PMC V tidak lebih dari jam $14:40$. Kesamaan terjadi ketika Alnilam, Gorgon, dan Wildabandon masing-masing mengerjakan soal PMC V secara individu selama 5 jam. ■

   ....

   Solution By, Rafael F., Anak Agung Gde K.K., Gregory Edward S. Misalkan a, g, w berturut-turut menyatakan lama waktu mereka mengerjakan soal PMC V secara mandiri (individu) dalam jam. Menurut $AM \geq HM$,

$$\begin{aligned} \frac{a+g+w}{3} &\geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{g}+\frac{1}{w}} \\ \frac{15}{9} &\geq \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{g}+\frac{1}{w}} \\ \frac{5}{3}\text{jam} &\geq \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{g}+\frac{1}{w}} \end{aligned}$$

Karena $\frac{5}{3}$ jam $= \frac{5}{3} \cdot 60$ menit $= 1$ jam 40 menit, maka mereka akan selesai tidak lebih dari jam $13:00 + 01:40 = 14:40$. Kesamaan terjadi ketika $a = g = w = 5$. ■

> **Komentar.** Rata-rata poin peserta dari soal inni adalah 1.54%. Demikian soal ini tergolong **sangat sulit**. Soal ini berhubungan dengan ketaksamaan, dapat menggunakan $AM \geq HM$ atau Chauchy Schwarz Engel. Alasan nilai beberapa peserta tidak sempurna (mendapatkan poin 14) karena tidak menunjukkan kapan terjadi kesamaan (yaitu saat $a = g = w$).

4. Diberikan $\triangle ABC$ lancip. Misalkan titik D, E, F berturut-turut pada sisi BC, CA, dan AB sehingga berlaku

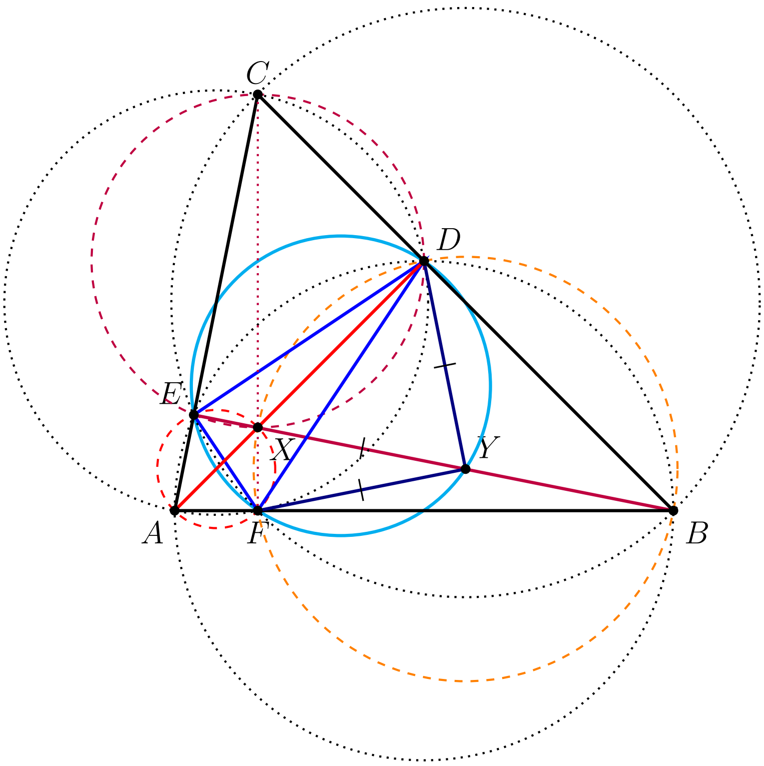
$$\frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CA}, \quad \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BA}$$

Misalkan X merupakan perpotongan BE dan CF, sedangkan titik Y merupakan perpotongan BX dengan lingkaran luar $\triangle DEF$. Buktikan bahwa Y merupakan titik tengah BX (dengan kata lain, buktikan bahwa panjang $BY = YX$).

Bukti.

> **Klaim 3.0.1 —** $ABDE, AFDC$, dan $BFEC$ segiempat talibusur

Bukti. Perhatikan bahwa $\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$ sehingga $\triangle CDE$ sebangun dengan $\triangle CAB$. Akibatnya, $\angle CDE = \angle BAC = \angle BAE$ yang menyimpulkan $ABDE$ segiempat talibusur. Dengan cara yang sama, maka $AFDC$ dan $BFEC$ juga segiempat talibusur. Klaim terbukti. □



Misalkan $\angle DAC = x, \angle DAB = y$, dan $\angle ACF = z$. Karena $ABDE$ segiempat talibusur, maka

$$\angle DBE = \angle DAE = x$$

Dengan cara yang sama,

$$\angle BCF = \angle BAD = y, \quad \text{dan} \quad \angle ABE = \angle ACF = z$$

Karena $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, maka $2x + 2y + 2z = 180°$ sehingga $x + y + z = 90°$. Tinjau

$$\angle ADB = 180° - \angle BAD - \angle ABD = 180° - y - x - z = 90°$$

Dengan cara yang sama, $\angle BEA = \angle CFA = 90°$ yang menyimpulkan AD, BE, CF garis tinggi.

Klaim 3.0.2 — $AFXE, BFXD, CEXD$ segiempat talibusur

Bukti. Perhatikan bahwa $\angle AFX + \angle AEX = 180°$, maka $AFXE$ merupakan segiempat talibusur. Dengan cara yang sama, maka $BFXD$ dan $CDXE$ segiempat talibusur. Klaim terbukti. □

Klaim 3.0.3 — EX, FX, DX merupakan garis bagi $\triangle DEF$.

Bukti. Karena $AFXE$ merupakan segiempat talibusur, akibatnya $\angle EFX = \angle EAX = x$. Karena $ABDE$ segiempat talibusur, maka $\angle EBD = \angle EAD = \angle EAX = x$. Karena $BFXD$ segiempat talibusur, maka $\angle XBD = \angle XFD = x$. Dapat kita simpulkan bahwa

$$\angle EFX = \angle EAX = \angle EBD = \angle XBD = \angle XFD = x$$

yang berarti $\angle EFX = \angle XFD = x$. Demikian FX merupakan garis bagi. Dengan cara yang sama, diperoleh $\angle FEX = \angle DEX = y$ dan $\angle EDX = \angle FDX = z$. Maka EX dan DX juga garis bagi. Klaim terbukti. □

Perhatikan bahwa $FYDE$ segiempat talibusur. Akibatnya,

$$\angle YDF = \angle YEF = y \quad \text{dan} \quad \angle YFD = \angle YED = y$$

Karena $\angle YFD = \angle YDF = y$, maka panjang $YD = YF$. Tinjau bahwa

$$\angle YXD = \angle EXA = 180° - \angle XAE - \angle XEA = 180° - x - 90° = 90° - x$$

Karena

$$\angle YDX = \angle YDF + \angle FDX = y + z = 90° - x$$

Maka $\angle YDX = \angle YXD$ sehingga panjang $YD = YX$. Demikian panjang $YD = YX = YF$. Dapat disimpulkan, bahwa Y merupakan titik pusat lingkaran luar $\triangle FXD$. Karena lingkaran luar $\triangle FXD$ melalui titik B (dari $BFXD$ segiempat talibusur), dapat disimpulkan bahwa Y merupakan titik pusat lingkaran luar segiempat $BFXD$. Mengingat bahwa $\angle BFX = \angle BDX = 90°$, demikian BX merupakan diameter lingkaran luar $BFXD$. Karena Y titik pusat lingkaran luar $BFXD$, maka Y merupakan titik tengah dari BX. ■

Komentar. Rata-rata nilai peserta dalam soal ini adalah 0.34. Ini merupakan soal **tersulit** pada bagian uraian. Ide pertama yang dapat digunakan adalah dengan menunjukkan $\triangle AFE, \triangle BFD, \triangle ECD$ sebangun dengan $\triangle ABC$. Dengan hal ini, kita dapat menemukan relasi sudut dari segitiga-segitiga tersebut.